

CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO EM UM CANAL IÔNICO

R. F. Vieira, J. B. Destro Filho, G. C. Guimarães e Q. Fanyao

Faculdade de Engenharia Elétrica/Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

e-mail: ferreiraphael@hotmail.com

Abstract: Development of new diagnosis and clinical methods based on magnetic stimulation techniques require deep knowledge of the parameters related to the interaction between tissues and the magnetic fields. This work presents a brief simulation study associated with the magnetic fields produced by the cerebral cortex neurons during resting potential. Simulations based on simple finite-element software provide the basis for introducing students to both general Maxwell-equation concepts and bioelectromagnetics of the neuronal membrane, as it is considered at the level of ionic channels associated with the sodium-potassium pump.

Keywords: Magnetic Field, Biomagnetism, Resting Potential.

Introdução

O bioeletromagnetismo é uma área de pesquisa relativamente recente [1], sendo que na bibliografia pedagógica para Engenharia Biomédica [2] poucas obras estão voltadas para este tema. Deve-se destacar, ao mesmo tempo, a existência de plataformas de domínio público, como o FEMM [3] e o BioFEMM [2], as quais permitem acompanhar o estudo teórico clássico de equações de Maxwell através de cálculos simples, porém mais próximos à realidade do estudante.

Do ponto de vista da pesquisa, intensos experimentos fisiológicos têm sido realizados no hipocampo, principalmente na região CA3, uma parte do cérebro considerada responsável por funções como leitura e memória [4].

Nesse sentido, o intuito do presente artigo é estimar campos eletromagnéticos através de situações simples, a partir da solução de equações de Maxwell e da simulação computacional do comportamento de canais iônicos da região hipocampal, no potencial de repouso.

Materiais e Métodos

Propriedades do neurônio – Canais iônicos são uma classe de proteínas integrais que atravessam toda a membrana celular, responsáveis por conduzir íons específicos do meio extracelular para o intracelular e vice-versa [5]. A velocidade do fluxo iônico é

determinada por uma série de fatores, dentre os quais a condutância do canal, que pode ser calculada pela medida da corrente, que é diretamente proporcional à variação de potencial na membrana. Assim, pode-se considerar um canal similar a um resistor, obedecendo à lei de Ohm.

Cada canal iônico aberto contribui para a geração de uma diferença de potencial elétrico entre as duas faces da membrana, que gera uma força eletromotriz de natureza química, conforme ilustrado na Figura 1.

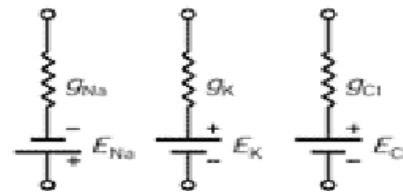


Figura 1: Representação elétrica de um canal iônico [5].

Os valores correspondentes a E_K , E_{Na} e E_{Cl} na Figura 1 são conhecidos como potenciais de Nernst [1] e são calculados no repouso, considerando-se fenômenos relacionados à diferença de concentração entre os meios extra e intracelular.

Circuito equivalente do neurônio – Unindo os principais fenômenos físicos que ocorrem na célula neuronal, é possível construir um circuito equivalente como o apresentado na Figura 2.

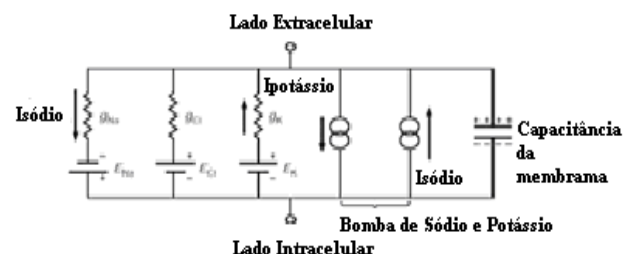


Figura 2: Circuito elétrico total dos fenômenos em um neurônio [5].

Para a condição específica da situação de repouso, a capacitância da membrana pode ser desprezada devido à inexistência de variações no potencial da célula. Já as correntes iônicas correspondem ao fluxo através da bomba de sódio e potássio, suposto constante [5].

Dessa forma, pode-se simplificar o circuito da Figura 2, gerando o modelo final para situações de repouso, assumido ao longo do presente artigo, conforme a Figura 3.

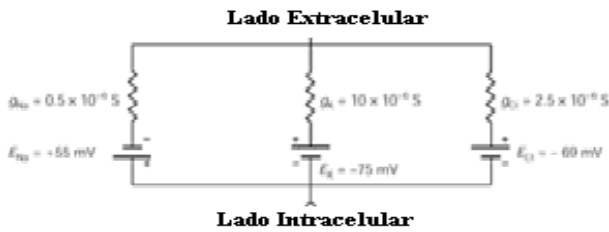


Figura 3: Circuito elétrico simplificado, análogo ao neurônio, para a situação de repouso celular [5].

Aplicando a análise de malhas no circuito da Figura 3, determina-se a expressão [6]:

$$I_k = g_k \times (V_m - E_k) \quad (1)$$

onde I_k é a corrente iônica, g_k a condutância do canal de potássio, V_m a diferença de potencial da membrana celular e E_k é o potencial de Nernst para o canal de potássio. A corrente média existente em cada canal iônico, na situação de repouso, pode ser calculada por:

$$I_{canal} = \frac{I_K}{N} \quad (2)$$

onde N é o número médio de canais iônicos da bomba ativa de potássio existente em um neurônio, assumido com o valor 100.000 [4] neste artigo.

A Figura 4 ilustra o modelo simplificado do canal iônico de potássio (suposto um cilindro), incluindo a densidade de corrente iônica ao longo de sua superfície. Tal densidade é constante por se tratar de uma análise na situação de repouso celular.

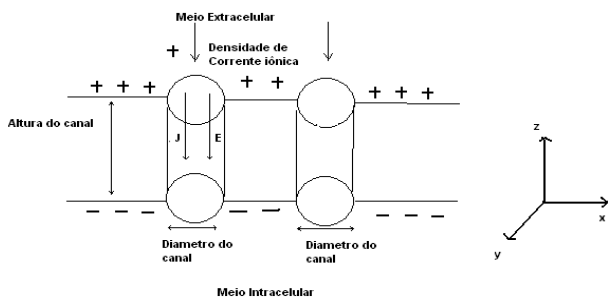


Figura 4: Desenho detalhado da membrana celular e da geometria escolhida.

A corrente total que percorre o canal é dada por:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

Partindo-se da equação (3), pode-se determinar o valor numérico da densidade de corrente, utilizando-se o

raio do canal iônico R e o valor da corrente média por canal I , calculada com o auxílio da equação (2), como mostrado na equação (4) [6].

$$\vec{J} = \frac{I \cdot dl}{dv} = \frac{I \cdot h}{\pi R^2 \cdot h} = \frac{I}{\pi R^2} \quad (4)$$

onde h é a altura do canal, que é suposta com a mesma dimensão da espessura da membrana.

Equações de Maxwell – Para o canal de potássio tem-se [6]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_K \quad (5)$$

Sabendo que

$$\vec{J}_K = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \frac{(V_m - V_{nerst})}{N \cdot h} \vec{a}_z \quad (6)$$

onde σ é a condutância do canal em (S/m), V_m é a diferença de potencial na membrana, V_{nerst} é o potencial de Nernst. Deve-se notar que, em (6), o campo elétrico é considerado constante ao longo da membrana, devido ao repouso.

Substituindo a equação (6) na equação (5) e resolvendo o rotacional acima utilizando a geometria cilíndrica, é possível deduzir as seguintes equações [6]:

$$\vec{H}_\phi = \frac{\sigma(V_m - V_{nerst}) \cdot R^2}{2\rho \cdot N \cdot h} \vec{a}_\phi \quad (7)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot \sigma(V_m - V_{nerst}) \cdot R^2}{2N \cdot h \cdot \rho} \vec{a}_\phi \quad (8)$$

Onde μ_r é a permeabilidade relativa, μ_0 a permeabilidade no vácuo e ρ a distância radial em que o campo magnético deverá ser calculado, medida a partir do ponto central do canal. Usando a definição de \vec{J}_K , conforme a equação (6), em (7)-(8), deduz-se:

$$\vec{H}_\phi = \frac{\vec{J}_K \cdot R^2}{2\rho} \vec{a}_\phi \rightarrow \vec{J}_K = \frac{\vec{H}_\phi \cdot 2\rho}{R^2} \quad (9)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{J}_K \cdot R^2}{2\rho} \vec{a}_\phi \quad (10)$$

Simulações – Para as simulações das grandezas campo e densidade de fluxo magnético, foi utilizado o programa FEMM – *Finite Element Method Magnetics*, que estima campos em duas dimensões, utilizando o método matemático dos elementos finitos. O programa está disponível para *download* em [3].

Com objetivo de se alcançar uma maior precisão nos cálculos, foi considerada a simetria de um cilindro que representa o canal iônico, incluindo um círculo de raio $R = 1,65 \text{ \AA}$, com profundidade correspondente à altura do canal iônico $h = 18 \text{ \AA}$, parâmetros característicos de neurônios do córtex cerebral [5].

Os valores de permeabilidade relativa e comportamento da curva B-H são solicitados pelo programa para a realização do mapeamento magnético. Para o caso em questão, por se tratar de um material biológico de natureza diamagnética, a permeabilidade relativa foi adotada como valor 1. De fato, num tecido apresentando natureza não-ferromagnética, a relação densidade de fluxo magnético e campo magnético ocorre de maneira linear [1]. A adoção deste valor deve-se também à dificuldade em encontrar quantificações exatas para esse parâmetro na literatura.

Resultados

Estimativa da corrente iônica por canal de potássio – Utilizando a equação (1) e adotando $g_k = 10 \cdot 10^{-6}$, $V_m = -69$ mV e $E_k = -75$ mV [5], pode-se calcular a corrente total produzida pelos canais do tipo potássio em uma célula nervosa:

$$I_k = 10 \cdot 10^{-6} \times (-69m + 75m) = 60 \cdot 10^{-9} A$$

Por meio da equação (2), obtém-se o valor de corrente para cada canal iônico.

$$I_{canal} = \frac{60 \cdot 10^{-9}}{100.000} = 0,6 \cdot 10^{-12} A$$

Utilizando como raio do canal iônico $R = 1,65 \text{ \AA}$ e altura do canal $h = 18 \text{ \AA}$ [5], calcula-se finalmente a densidade de corrente por canal iônico, valendo-se da equação (4).

$$\vec{j} = \frac{I dl}{dv} = \frac{+0,6 \cdot 10^{-12}}{\pi R^2} = \frac{0,6 \cdot 10^{-12}}{\pi (1,65 \cdot 10^{-10})^2} = 7,01 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$$

O valor da densidade de corrente do canal, estimada no parágrafo anterior, pode ser aplicada no *software*, obtendo-se como resultado um mapeamento completo da densidade de fluxo magnético da estrutura em uma dada região, definida por meio de uma condição de contorno.

Após a parte de pré-processamento (definição de parâmetros, geometrias e condições de fronteira) foi possível gerar uma distribuição de densidade de fluxo magnético para um canal de potássio na situação de repouso. A Figura 5 apresenta uma visão superior do modelo simples descrito pela Figura 4, considerando duas dimensões. O centro da Figura 5 corresponde ao ponto central do canal.

Para complementar o estudo do comportamento do fluxo magnético gerado pelos íons no canal iônico, tem-se o gráfico da Figura 6, também gerado pelo *software* FEMM.

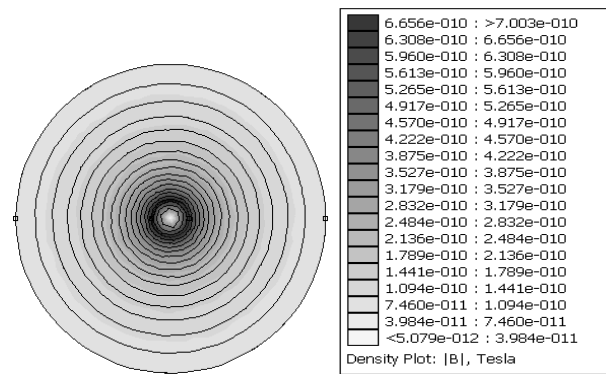


Figura 5: Simulação das linhas de força associadas ao módulo do vetor densidade de fluxo magnético, vista superior, no canal de potássio.

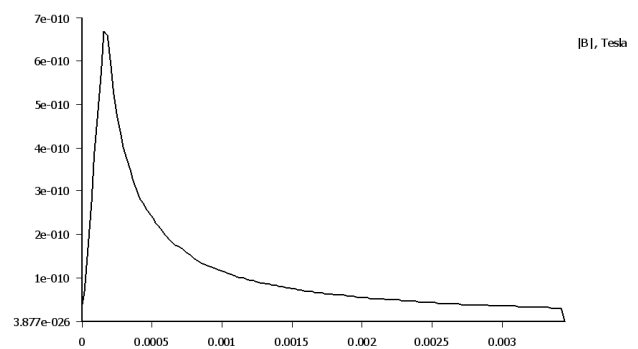


Figura 6: Módulo do vetor densidade de fluxo magnético ao longo da distância radial, medida relativamente ao centro do canal.

Discussão

Magnitude do campo magnético no canal de potássio – Tanto a partir de (9)-(10), como a partir das Figuras 5 e 6, percebe-se que o campo apresenta uma magnitude bastante reduzida e um comportamento inversamente proporcional à distância, para o espaço que engloba a área externa ao canal. Os resultados obtidos no *software* podem também ser comparados a valores calculados a partir de (9)-(10), que foram deduzidas por meio das equações de Maxwell.

Fixando como distância de comparação o raio do canal de potássio, o valor do campo magnético e da densidade de fluxo magnética obtidos por meio de (8)-(9) são, respectivamente,

$$\vec{H}_\phi = \frac{7,01 \cdot 10^6 (1,65 \cdot 10^{-10})^2}{2 \cdot 1,65 \cdot 10^{-10}} \vec{a}_\phi = 5,7 \cdot 10^{-4} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^{-4} \vec{a}_\phi = 7,16 \cdot 10^{-10} \vec{a}_\phi$$

Comparando-se os valores das simulações para a distância de $1,65 \text{ \AA}$ (raio do canal) através das Figuras 5 e 6 e os valores obtidos analiticamente no parágrafo anterior, percebe-se uma grande proximidade.

Comportamento do campo entre dois canais – As Figuras 5 e 6 revelam que durante o período de repouso, a densidade de fluxo magnético produzido por um canal apresenta magnitude desprezível para uma distância de 100 Å. Tendo em vista que a distância média entre um canal e outro adjacente é de aproximadamente 100 Å [3], isto significa que o campo magnético de um canal não afeta os demais vizinhos, o que está fisiologicamente coerente com a situação de repouso.

Esta conclusão pode ser visualizada também de outra maneira. A Figura 7 representa dois canais iônicos separados por uma distância média de 100 Å, incluindo as linhas de fluxo magnético. Percebe-se claramente que tais linhas, criadas pelo canal da esquerda, diminuem sensivelmente sua amplitude, demonstrando a baixa influência do campo de um canal em outro próximo. A Figura 8 é uma representação gráfica simplificada da mesma Figura 7.

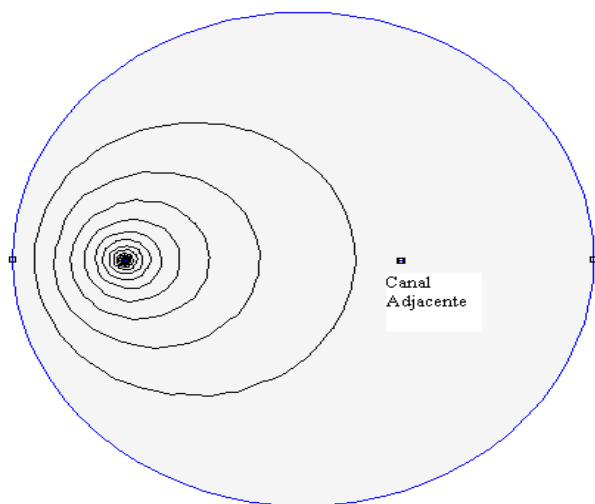


Figura 7: Comportamento da densidade de fluxo magnético ao longo da distância entre 2 canais.

Conclusão

Este trabalho ilustra o cálculo do campo magnético do canal iônico de potássio (bomba ativa) na situação de repouso celular, no contexto de neurônios corticais, partindo-se de uma análise simples e direta. Utilizando um circuito elétrico equivalente da membrana neuronal, foi possível estimar uma densidade de corrente, que consiste no principal dado de entrada para simulação computacional, a qual gerou gráficos que representam o comportamento da densidade de fluxo magnética no espaço bidimensional. As equações de Maxwell para campos estacionários foram utilizadas, objetivando comparar os resultados analíticos com os resultados computacionais obtidos via *software*. Os dois resultados se mostram bastante próximos.

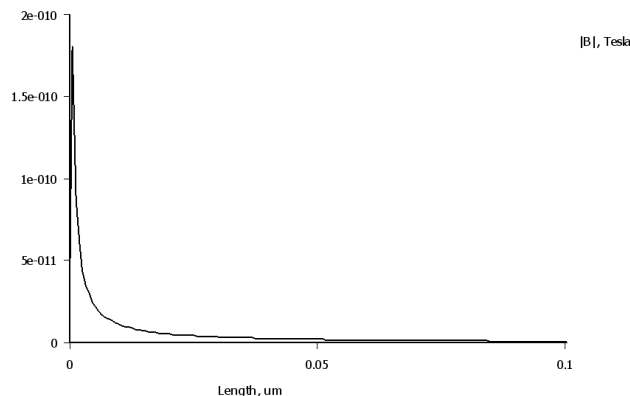


Figura 8: Módulo do vetor densidade de fluxo magnético, ao longo da distância reta entre 2 canais adjacentes, medido com referência ao canal-fonte do fluxo magnético.

Trata-se de um trabalho em um contexto pedagógico, também servindo de ponto de partida para pesquisas mais aprofundadas. Como seqüência ao trabalho realizado, propõe-se o estudo dos campos magnéticos nos canais iônicos dos neurônios do córtex cerebral para a situação do potencial de ação.

Agradecimentos

Os sinceros agradecimentos à UFU pelo apoio financeiro fornecido por meio do programa de bolsas PIBEG.

Referências

- [1] Malmivuo, J., Plonsey, R. (1995), *Bioelectromagnetism – Principles and Applications of Bioelectrical and Biomagnetic Fields*, New York: Oxford University Press.
- [2] Bronzino, J.D. (2006), *The Biomedical Engineering Handbook*, 3rd ed. New York: CRC.
- Yoshio
- [3] Meeker, D. (2004) “Finite Element Method Magnetics – User’s Manual”, disponível em <http://femm.foster-miller.com/>, acesso em 20/11/07.
- [4] Sakatani, S., Okada, Y.C., Hirose A. (2002) “A quantitative evaluation of dominant membrane potential in generation of magnetic field using a pyramidal cell model at hippocampus CA3”, *Neurocomputing*, v. 44-46, p. 153-160.
- [5] Kandel, Eric R., Jessell, Thomas M., Schwartz, James, H. (2000), *Principles of Neural Science*, NY: McGraw-Hill.
- [6] Hayt, W.H. Jr., Buck, J.A. (1982) *Eletromagnetismo* Rio de Janeiro: LTC.